SOUTH-WEST UNIVERSITY
·NEOFIT RILSKY·
BLAGOEVGRAD, BULGARIA

VOLUME 1
2001

SCIENTIFIC Research

ELECTRONIC
ISSUE

Сдвоявания в графи. Теорема на Хол

Борислав Юруков

В статията се предлага една от разработените от автора 10 теми, свързани с оптимизационни алгоритми в графи и мрежи, предназначена за ученици от средното училище.

Сдвояванията и покритията в графи са интересна тема. В случая са разгледани само максимални и пълни сдвоявания в биполярни графи. По-конкретно е разгледана теоремата на Хол и някои нейни следствия.

Ще разгледаме една на пръв поглед "несериозна" задача, която е емблематична за един много широк клас оптимизационни проблеми.

Задача 1 (Задача за сватбите.) Имаме m момичета и n момчета. Знаем за всяко от момичетата кои момчета познава. При какви условия можем да омъжим всички момичета, като не стигаме дотам да омъжим момиче за момче, което не познава.

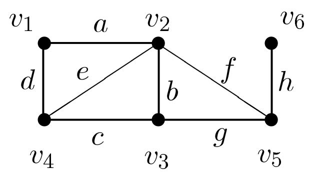
Разбира се, в горната задача се визира моногамния случай (никое момче не се жени за две или повече момичета и обратно). Задачата е интересна и в полигамния случай.

На езика на теория на графите задачата може да се преведе така. Даден е биполярен граф $G = (X, Y, A)$, в който върховете x_1, x_2, ..., x_m са съответни на всяко от момичетата, а върховете y_1, x_y, ..., y_n са съответни на всяко от момчетата. Реброто (x_i, y_j) е от графа тогава и само тогава, когато y_i е момче, което момичето x_i познава.

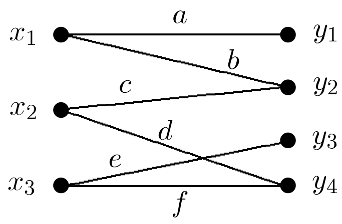
При какви условия можем да намерим такова множество от *независими ребра* (всеки две от тях нямат общ връх), което "насища" върховете на множеството X?

Всяко множество от независими ребра в грава се нарича *сдвояване* (съчетание по двойки). Сдвояването с най-голям брой ребра се нарича *максимално сдвояване.* Върхът v се нарича *наситен* за сдвояването M, ако този връх се явява краен за ребро от M.

Пример 1 Да разгледаме графите G_1 и G_2.

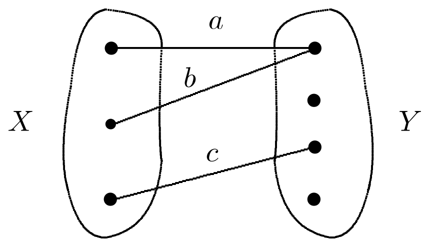


Граф G_1



Граф G_2

В графа G_1 множеството ребра $\{e,\ g\}$ е сдвояване, но то не е максимално. Максимално е например сдвояването $\{h,\ b,\ d\}$, както и сдвояването $\{h,\ c,\ a\}$. В биполярния граф G_2 от примера максималното сдвояване M е с мощност 3. В графа G_1 върхът v_2 е наситен за сдвояването $M = \{e,\ g\}$, докато върхът v_1 е ненаситен. В биполярния граф $G = (X, Y, A)$ казваме, че X *се сдвоява с* Y, ако съществува сдвояване M, за което всеки връх на X е наситен в M. Тогава сдвояването M се нарича *пълно сдвояване* на X с Y. Например, в графа G_2 от примера сдвояването $\{a,\ c,\ e\}$ е пълно. От дефиницията е ясно, че пълното сдвояване в биполярния граф е максимално, но не всяко максимално сдвояване е пълно. Например, в биполярния граф G:



максималните сдвоявания (такива са $\{a,\ c\}$ и $\{b,\ c\}$) не са пълни сдвоявания на X с Y.

Сдвоявания, насищащи всички върхове на графа G, се наричат *съвършени (покриващи).* Такова е например сдвояването $\{h,\ b,\ d\}$ в графа G_1 от пример 1. Цитираното вече сдвояване $\{a,\ c,\ e\}$ в графа G_2 от пример 1 е пълно (следователно и максимално), но то не е съвършено — върхът y_4 не е наситен.

Задача 2 Верни ли са за произволен граф G твърденията:

а) Всяко максимално сдвояване насища върховете на G;

б) Съществува максимално сдвояване, насищащо върховете на G.

Отг. Не.

Формулираната вече задача 1 за сватбите може да се модифицира и формулира в различна терминология. Например:

Задача 3 (Задача за играчките.) Имате m на брой деца и n на брой играчки. Знае се за всяко от децата кои играчки харесва. Как да се разпределят играчките между децата (всяко дете получава една играчка), така че максимален брой деца да получат желана от тях играчка?

Задача 4 (Задача за назначенията.) Дадени са m работника и n дейности. Знае се за всеки от работниците кои дейности може да извършва. По какъв начин да се разпределят дейностите (на всеки работник се възлага най-много една дейност), така че максимален брой работници да бъдат ангажирани.

Съществуват десетки интерпретации на така наречената задача за сватбите — максимален брой сделки, които трябва да осъществи последник, получаващ комисион от всяка сделка; максимален брой игри, които могат да се осъществят в компютърен клуб и т.н. и т.н. Нещо повече, ние ще разгледаме максимални сдвоявания, които са максимални по мощност (брой на участващите в тях ребра). Ако на всяко ребро съпоставим тегло (коефициент на целесъобразност) и търсим сдвоявания, чието сумарно тегло е максимално, е ясно, че в този случай няма да бъде задължително да търсим сдвояване с максимален брой ребра, тъй като то може да не е сдвояването с максимално сумарно тегло.

Сдвоявания в биполярни графи

Да се върнем сега отново на задача 1. Нека $G = (X, Y, A)$ е биполярният граф, съответен на задачата за сватбите и S е произволно множество от момичета, т.е. $S \subseteq X$. За множеството S и съответното му множество $\Gamma(S)$, което е подмножество на Y, има три възможности:

а) $|S| > |\Gamma(S)|$, т.е. $|S| - |\Gamma(S)| > 0$;

б) $|S| = |\Gamma(S)|$, т.е. $|S| - |\Gamma(S)| = 0$;

в) $|S| < |\Gamma(S)|$, т.е. $|S| - |\Gamma(S)| < 0$.

Очевидно в първия случай няма пълно сдвояване на S с $\Gamma(S)$ и всяко сдвояване M в графа ще насища не повече от $|\Gamma(S)|$ върха на S. Да означим със $\sigma(S)$ разликата $|S| - |\Gamma(S)|$. Величината $\sigma(S)$ се нарича *дефицит на множеството* S [3].

От казаното следва, че за сдвояването M имаме

$$|M| \leq |X| - \sigma(S). \tag{1}$$

Тъй като (1) е в сила за всяко $S \subseteq X$ следва, че за произволно сдвояване M имаме

$$|M| \leq |X| - \max_{S \subseteq X}\{\sigma(S)\}. \tag{2}$$

Максималният от всички дефицити се нарича *дефицит на графа* G, т.е.

$$\sigma(G) = \max_{S \subseteq X}\{|S| - |\Gamma(S)|\}.$$

С други думи, (2) може да се запише

$$|M| \leq |X| - \sigma(G). \tag{3}$$

Обърнете внимание, че ако всички дефицити $\sigma(S)$ са по-малки или равни на 0 (случаите б) и в)), дефицитът на графа $\sigma(G) = 0$, тъй като за сдвояването $M = \emptyset$ имаме $|M| = 0$. С други думи, за произволен граф G дефицитът $\sigma(G) \geq 0$.

Ще формулираме сега теоремата на Хол:

Теорема 1 (Теорема на Hall.) *В биполярния граф $G = (X, Y, A)$ съществува пълно сдвояване тогава и само тогава, когато за $\forall S \subseteq X$*

$$|S| - |\Gamma(S)| \leq 0, \quad (\text{т.е.} \;\; \sigma(G) = 0).$$

◁

Ще дефинираме теоремата на Хол и на езика на сватбите:

Теорема 2 *Задачата за сватбите има решение тогава и само тогава, когато всеки k момичета познават общо не по-малко от k момчета, $1 \leq k \leq m$, където m е броят на момичетата.*

Теорема 1 е доказана от Халмош и Воган, като идеята за тяхното доказателство е дадена от Болобаш с езика на сватбите (т.е. настоящата теорема).

Доказателство: *Необходимост:* Необходимостта е очевидна поради направените вече коментари (ако $|S| > |\Gamma(S)|$, следва, че не съществува пълно сдвояване).

Достатъчност: Да приложим индукция относно броя m на момичетата. При $m = 1$ твърдението е вярно. Да допуснем, че за $m \geq 2$ условието "всеки k момичета познават общо не по-малко от k момчета" е достатъчно условие за по-малки стойности от m.

1. Да допуснем, че всеки k момичета, $1 \leq k < m$, познават общо поне $k + 1$ момчета. В такъв случай "уреждаме" една произволна сватба. Оставащите множества от момичета и момчета удовлетворяват условието и според индуктивното допускане останалите $n - 1$ момичета могат да бъдат омъжени.

2. Да допуснем, че за някое k има k момичета, които познават общо точно k момчета. В този случай да омъжим тези k момичета за тези k момчета. За оставащите множества от момичета и момчета условието на твърдението е изпълнено. Наистина, ако допуснем, че някои l неомъжени все още момичета познават по-малко от l на брой от останалите момчета, то споменатите $k + l$ момичета ще познават по-малко от $k + l$ момчета, което е невъзможно. Според индуктивното допускане оставащите момичета могат да бъдат омъжени за някои от оставащите момчета. С това теоремата е доказана. $\triangleleft$

Други по-формални доказателства на теоремата на Хол можете да намерите в [3] и др.

Следствие 1 *За всеки еднороден биполярен граф съществува пълно сдвояване.*

Верността директно следва от теоремата на Хол.

И така, от теоремата на Хол следва, че ако дефицитът на графа $\sigma(G) = 0$, то в максималното сдвояване за биполярния граф $G = (X, Y, A)$ броят на ребрата е точно $|X| - |\sigma(G)|$, т.е. равенството в (3) се постига. Може да се докаже, че и при $\sigma(G) > 0$ броят на ребрата в максималното сдвояване е $|X| - |\sigma(G)|$. Достатъчно е да се добавят $\sigma(G)$ върха към Y и да ги съединим с всички върхове от X. Полученият по този начин нов граф удовлетворява условието за съществуване на пълно сдвояване. Това дава основание да формулираме следната теорема на Кьониг:

Теорема 3 *Броят на ребрата в максималното сдвояване за биполярния граф $G = (X, Y, A)$ е равен на $|X| - |\sigma(G)|$, където $\sigma(G)$ е дефицията на графа.* $\triangleleft$

Следствие 2 *Можем да омъжим всичките момичета, с изключение на d от тях тогава и само тогава, когато които и да са k момичета познават общо поне $k - d$ момчета.*

Следствие 3 *(Полигамия - i-тото момче възнамерява да се ожени за d_i момичета) Биполярният граф G съдържа подграф H, такъв, че $d_H(x_i) = d_i$ и $0 \leq d_H(y_j) \leq 1$ тогава и само тогава, когато $\sum_{x_i \in S} d_i \leq |\Gamma(S)|$ за $\forall S \subset X$.*

Верността на твърдението лесно се установява с помощта на теоремата на Хол. Заменете всеки връх x_i с d_i върха, съединени с всички върхове от $\Gamma(x_i)$. В новия граф ще съществува подграф H тогава и само тогава, когато има сдвояване на новия клас върхове X с върхове Y.

Следствие 4 *Ако $G = (X, Y, A)$ е биполярен граф, за който*

$$\min_{x \in X}\{d(x)\} \geq \min_{y \in Y}\{d(y)\},$$

то съществува пълно сдвояване на X с Y.

Литература

[1] Minieka, E. *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1978 (Майника, Э. *Алгоритмы оптимизации на сетях и графах*, М., "Мир", 1981).

[2] Christofides, N. *Graph Theory. An Algorithmic approach*, Academic Press Inc (London) Ltd. 1975, 1977 (Кристофидес, Н. *Теория графов. Алгоритмический подход*, М., "Мир" 1978.

[3] Swamy, M., K. Thulasirman. *Graphs, Networks and Algorithms*, John Wiley & Sons, 1981 (Свами М., К. Тхуласирман. *Графы, сети и алгоритмы*, М., "Мир", 1984).

Благоевград

Ул. "Иван Михайлов" № 66

ЮЗУ "Неофит Рилски"

Катедра "Информатика"

Борислав Юруков